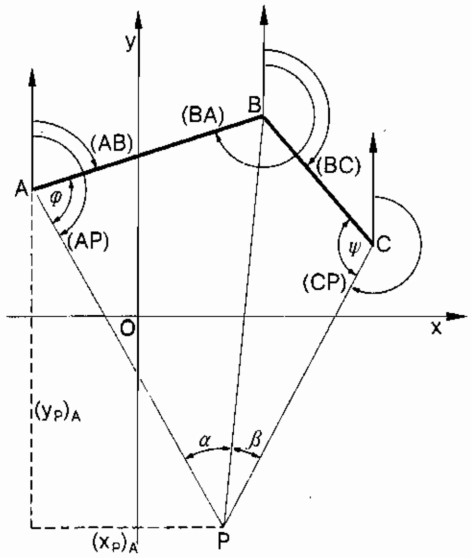
13.5 Problema di Snellius-Pothenot semplice

Determina la posizione planimetrica di un punto accessibile P (fig. 13.3), dal quale siano visibili altri tre punti A, B e C inaccessibili e di posizione nota, mediante le misure degli angoli α e β formati dalle tre direzioni uscenti dal punto incognito e dirette ai tre punti noti.

Perché la soluzione sia però possibile è necessario che $\alpha+\beta+\widehat{B} \neq 180°$ (nella pratica operativa è opportuno che l'angolo somma differisca dall'angolo piatto di almeno 180°/6); inoltre perché sia anche univoca deve essere stabilito il senso di percorrenza dei quattro vertici A, B, C e P (noi converremmo che sia orario).

Figura 13.3 Problema di Snellius-Pothenot semplice, o di intersezione inversa.



Le operazioni si susseguono nel seguente ordine:

A) Calcolo logaritmico o meccanico per calcolatrici

a) Coordinate polari di B rispetto ad A, in funzione delle coordinate cartesiane:

$$(AB) = \mathrm{INV}^{\tan} \frac{(x_B)_A}{(y_B)_A}, \qquad AB = \frac{(x_B)_A}{\mathrm{sen}\,(AB)} = \frac{(y_B)_A}{\cos\,(AB)} \tag{13.13}$$

b) Coordinate polari di C rispetto a B, in funzione delle coordinate cartesiane:

$$(BC) = \mathrm{INV}^{\tan} \frac{(x_C)_B}{(y_C)_B}, \qquad BC = \frac{(x_C)_B}{\mathrm{sen}\,(BC)} = \frac{(y_C)_B}{\cos\,(BC)} \tag{13.14}$$

c) Angolo nel vertice B:

$$\widehat{B} = (BA) - (BC) = (AB) \pm 180° - BC \quad \begin{cases} +\ \text{se}\ (AB) < 180° \\ -\ \text{se}\ (AB) > 180° \end{cases}$$

d) Calcolo, per somma e sottrazione, dei due angoli incogniti $B\widehat{A}P = \varphi$ e $P\widehat{C}B = \psi$. La semisomma risulta uguale a:

$$\frac{1}{2}(\varphi+\psi)=\frac{1}{2}(360°-\widehat{B}-\alpha-\beta)=180°-\frac{\widehat{B}+\alpha+\beta}{2}=M° \qquad (13.15)$$

Per trovare ora la semidifferenza di questi angoli, incominciamo a mettere le due basi AB e BC in funzione l'una dell'altra mediante il teorema dei seni; si ha:

$$AB=BP\frac{\text{sen }\alpha}{\text{sen }\varphi}=BC\frac{\text{sen }\psi\text{ sen }\alpha}{\text{sen }\beta\text{ sen }\varphi}$$

e isolando i termini incogniti da quelli noti, otteniamo:

$$\frac{\text{sen }\varphi}{\text{sen }\psi}=\frac{BC\text{ sen }\alpha}{AB\text{ sen }\beta}$$

Nella pratica il secondo membro della precedente può assumere un qualunque valore compreso fra $-\infty$ e $+\infty$, a causa della possibilità che hanno i suoi termini di prendere essi stessi un valore qualsiasi. Si può allora sostituire tutta l'espressione con la cot (ovvero 1/tan) di un *angolo ausiliario* λ, perché questa è una funzione che contempla tutto il predetto intervallo, a patto però che si determini il valore di questo angolo, corrispondente ai valori reali delle misure effettuate e dei dati disponibili, mediante la relazione:

$$\frac{BC\text{ sen }\alpha}{AB\text{ sen }\beta}=\frac{1}{\tan\lambda}, \quad \text{da cui deriva:} \quad \lambda=\text{INV}^{\tan}\frac{AB\text{ sen }\beta}{BC\text{ sen }\alpha} \qquad (13.16)$$

Allora sarà anche:

$$\frac{\text{sen }\varphi}{\text{sen }\psi}=\frac{1}{\tan\lambda}$$

e poiché questa può considerarsi una proporzione, applicando lo scomponendo e il componendo, si ottiene:

$$\frac{\text{sen }\varphi-\text{sen }\psi}{\text{sen }\varphi+\text{sen }\psi}=\frac{1-\tan\lambda}{1+\tan\lambda}$$

Applicando al primo membro della precedente la formula di postaferesi, si ha inoltre:

$$\frac{\text{sen }\varphi-\text{sen }\psi}{\text{sen }\varphi+\text{sen }\psi}=\frac{\tan 1/2\,(\varphi-\psi)}{\tan 1/2\,(\varphi+\psi)}$$

mentre, applicando al secondo membro della stessa la formula di sottrazione e ricordando che $1=\tan 45°$, si ha:

$$\frac{1-\tan\lambda}{1+\tan\lambda}=\frac{1-\tan\lambda}{1+1\cdot\tan\lambda}=\frac{\tan 45°-\tan\lambda}{1+\tan 45°\tan\lambda}=\tan(45°-\lambda)$$

per cui risulta:

$$\frac{\tan 1/2\,(\varphi-\psi)}{\tan 1/2\,(\varphi+\psi)}=\tan(45°-\lambda)$$

dalla quale si ottiene la semidifferenza dei due angoli cercati:

$$\frac{1}{2}(\varphi-\psi)=\mathrm{INV}^{\tan}[\tan M^\circ\cdot\tan(45^\circ-\lambda)]=N^\circ \tag{13.17}$$

Dal sistema delle relazioni (13.15) e (13.17), sommando e sottraendo rispettivamente i primi e i secondi membri, si ricava infine:

$$\begin{aligned}\varphi&=M^\circ+N^\circ\\ \psi&=M^\circ-N^\circ\end{aligned} \tag{13.18}$$

e) Coordinate polari di P rispetto ad A:

$$(AP)=(AB)+\varphi, \qquad AP=AB\,\frac{\text{sen}\,(\varphi+\alpha)}{\text{sen}\,\alpha} \tag{13.19}$$

f) Coordinate cartesiane di P, riferite al punto A:

$$\begin{aligned}(x_P)_A&=AP\ \text{sen}\,(AP) \qquad & x_P&=x_A+(x_P)_A\\ (y_P)_A&=AP\cos(AP) \qquad & y_P&=y_A+(y_P)_A\end{aligned} \tag{13.20}$$

g) Coordinate cartesiane di P riferite ai punti B o C (per verifica), in modo analogo.

h) Formule da usare nel calcolo e caso di indeterminatezza:
Il metodo esposto non si conclude con una formula finale, da usare per le applicazioni numeriche; queste devono, al contrario, interessare tutte e soltanto quelle espressioni che abbiamo indicato con i numeri da (13.13) a (13.20).
Nel caso risulti $\alpha+\beta+\widehat{B}=180^\circ$, sarà inoltre anche $\varphi+\psi=180^\circ$ e quindi:

$$\tan M^\circ=\tan 1/2\,(\varphi+\psi)=\tan 90^\circ=\infty$$

ma risulterà anche:

$$\frac{\text{sen}\,\varphi}{\text{sen}\,\psi}=\frac{\text{sen}\,\varphi}{\text{sen}\,(180^\circ-\varphi)}=\frac{\text{sen}\,\varphi}{\text{sen}\,\varphi}=1=\frac{1}{\tan\lambda}, \qquad \text{cioè:}$$

$$\lambda=45^\circ, \qquad \tan(45^\circ-\lambda)=\tan 0^\circ=0$$

per cui la (13.17), e con essa l'intero procedimento, diventano indeterminati e il metodo di Snellius-Pothenot non è più praticamente utilizzabile.